n. 2
ottobre
2022

anno XL

La teoria degli insiemi. Dagli assiomi di base ai grandi cardinali

Set Theory. From the Basic Axioms to Large Cardinals

Claudio Ternullo

La teoria degli insiemi è considerata il fondamento della matematica. L'articolo offre una breve panoramica di alcuni risultati centrali della teoria degli insiemi primitiva (cantoriana), della teoria assiomatica (in particolare, della teoria ZFC), discute brevemente gli assiomi più recenti, per esempio quelli dei "grandi cardinali" e, infine, accenna alle varie strategie giustificative, a livello filosofico, dei vecchi e nuovi assiomi.

Parole chiave
teoria degli insiemi, assiomi, ZFC, assioma di scelta, nuovi assiomi, grandi cardinali

Set theory is taken to be the foundation of mathematics. The article provides a brief overview first of some central results of the Cantorian theory, then of axiomatic set theory (in particular, of the theory ZFC), briefly reviews new axioms such as "large cardinal" axioms, and, finally, hints at the various philosophical strategies behind the justification of both old and new axioms.

Keywords
set theory, axioms, ZFC, axiom of choice, new axioms, large cardinals

To cite this article: Claudio Ternullo, «Nuova Secondaria», 2 (2022), XL, pp. xx-xx

Corresponding author: claudio.ternullo@ub.edu

1. Preambolo: la teoria cantoriana

La teoria degli insiemi è il trionfo dell'*infinito attuale*, dell'infinito, cioè, esistente in senso *sostanziale*, non meramente *processuale*. Le origini della teoria vanno ricercate nell'opera di Georg Cantor, sebbene input fondamentali siano venuti anche dal lavoro di Bernard Bolzano e Richard Dedekind.[1]

Usando il principio della *biiezione*, secondo cui due collezioni (finite o infinite) A e B hanno la stessa grandezza se esiste una funzione *biiettiva* (*iniettiva* e *surgettiva*) da A a B, Cantor fu in grado di stabilire che gli insiemi numerici $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ hanno la stessa grandezza (cardinalità) e che $\mathbb{R}$, invece, è *più grande di* $\mathbb{N}$. La dimostrazione di quest'ultimo risultato è particolarmente degna di nota. Cantor usò un

[1] Un quadro esauriente della storia primitiva della teoria si trova in Ferreirós (2007). Si veda anche Ternullo-Fano (2021), capitolo 2.

© Nuova Secondaria – n. 2, ottobre 2022 - anno XL - ISSN 1828-4582

procedimento "diagonale": per assurdo, supponiamo si dia un'enumerazione $R = \{r_o, r_1, \dots, r_n, r_{n+1}, \dots\}_{n\in\mathbb{N}}$ di *tutti* i numeri reali e si definisca un nuovo numero reale r che è *diverso* da r_0 per la prima cifra decimale, da r_1 per la seconda cifra decimale, e così via, per ogni numero in R. r esiste (si può costruire *effettivamente*), ma non può, per definizione, essere in R.
La cardinalità di $\mathbb{R}$ (del *continuo*) si indica con $\mathfrak{c}$, mentre la cardinalità di $\mathbb{N}$ si indica con $\aleph_0$.
Dato un insieme A, si può definire l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi (ovverosia di tutti gli insiemi i cui elementi sono tutti in A). Questo insieme si chiama *insieme-potenza* e la sua cardinalità è $2^{|A|}$ ($|A|$ indica la cardinalità di A). I numeri reali si possono mettere in corrispondenza biunivoca con sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$, quindi, $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. L'insieme potenza di $\mathfrak{c}$ ha cardinalità $2^{2^{\aleph_0}}$, l'insieme potenza di questo $2^{2^{2^{\aleph_0}}}$ e così via.
Si può procedere a definire altre cardinalità transfinite più grandi di $\aleph_0$ anche in un altro modo. Per spiegarlo bene, dobbiamo introdurre il concetto fondamentale di *ordinale transfinito*. Cantor introduce un nuovo numero ω *dopo* tutti i numeri naturali, e poi procede a definire $\omega + 1, \dots, \omega + n, \dots, \omega \cdot \omega, \dots, \omega^2, \dots, \omega^\omega, \dots$ Dopodiché, definisce ω anche come il *tipo d'ordine* dell'insieme $\{0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots\}$, $\omega + 1$ dell'insieme (ad esempio) $\{1, 2, \dots, n, n+1, \dots; 0\}$ e così via.[2] Ora, si dimostra che ciascuno di questi ordinali ha cardinalità $\aleph_0$, ma l'insieme di *tutti* questi ordinali è più grande di $\aleph_0$: ha la cardinalità immediatamente successiva, ovverosia $\aleph_1$. Il tipo d'ordine corrispondente, ω_1, si può combinare con gli altri ordinali e con sé stesso come sopra, così da avere altri ordinali che, presi insieme, hanno cardinalità $\aleph_2$ e, iterando il processo, otteniamo una nuoba serie di cardinalità transfinite: $\aleph_0, \aleph_1, \dots \aleph_\omega, \dots$
Cantor congetturò che $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, ma non riuscì a dimostrarlo. L'Ipotesi del Continuo (come fu definita la congettura) fece da battistrada allo sviluppo della teoria degli insiemi. Più avanti, diremo qualcosa sul suo stato attuale.
Infine, si definisce *bene ordinato* un insieme: 1) che abbia un ordine *totale* (tale che ogni due suoi elementi siano confrontabili); 2) ogni cui sottoinsieme abbia un elemento minimo. Cantor riteneva che fosse una legge del pensiero che ogni insieme fosse *bene ordinabile*.[3] Non c'è nessun altro principio insiemistico che giustifichi questo assioma, per il quale Ernst Zermelo, più tardi, trovò una giustificazione più forte tramite il suo Assioma di Scelta.

2. Gli assiomi: giustificazione intuitiva e formale

Storicamente, alla fine dell'800 si avvia un processo di trasformazione della matematica in un corpo di teorie formali, formulate in un linguaggio logico rigoroso e trasparente. Questo riguarda l'aritmetica, l'analisi, la geometria, varie teorie algebriche, e, naturalmente, anche la teoria degli insiemi. Questo approccio culmina nell'idea hilbertiana (difesa, in tempi più recenti, per esempio anche da Bourbaki) secondo cui la matematica si occupa di specifiche strutture formalizzate (ovverosia, assiomatizzate) entro una cornice assiomatica più generale, che è quella degli insiemi.
La scoperta di *paradossi*, quale quello di Russell, suggeriva, inoltre, che il concetto ingenuo di insieme ("ogni proprietà definibile nel linguaggio definisce un insieme") fosse incoerente.[4] Formalizzando la teoria cantoriana, quindi, si sperava che se ne potesse garantire anche la *coerenza*.
Gli assiomi hanno altre giustificazioni, per così dire, filosofiche. Essi sembrano anche *intuitivamente* veri sulla base di un *concetto di insieme* che alcuni autori ritengono sia oggettivo. Questo non significa necessariamente che gli assiomi siano autoevidenti, ma che le proprietà che essi attribuiscono agli insiemi siano deducibili (attraverso un'analisi progressiva) dal concetto stesso di insieme.
Come si è già detto, gli assiomi hanno, poi, un valore *fondazionale* (servono a darci dei principi su cui edificare tutta quanta la matematica) e ci consentono anche di sviluppare "ulteriormente" la teoria degli insiemi nelle direzioni più varie. Queste ragioni si definiscono, qualche volta, *estrinseche*, ma secondo alcuni autori, non sono meno fondamentali (cf. Maddy 1996).

3. La teoria assiomatica Zermelo-Fraenkel

La teoria degli insiemi Zermelo-Fraenkel (ZF) consta di 8 assiomi, 9 con l'Assioma di Scelta (ZFC). Essa fu formulata in momenti diversi da Ernst

[2] Più tardi, von Neumann definisce gli ordinali come insiemi dei loro predecessori (0 è l'insieme vuoto, $\emptyset$): $1 = \{0\}$; $2 = \{0, 1\}$; ..., $\omega + 1 = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\}$, ...
[3] Cf. Cantor (1932), p. 169.

[4] Nel caso del paradosso di Russell, la proprietà in questione è: "x non è membro di sé stesso": se esistesse l'insieme X di tutti gli x che soddisfano questa proprietà, se $X \in X$, allora $X \notin X$ e se $X \notin X$, allora $X \in X$.

Zermelo e integrata da J. von Neumann e A. Fraenkel. Ulteriori contributi vennero da T. Skolem, K. Gödel, D. Mirimanoff e P. Bernays. Nel seguito introduciamo, con qualche parola di commento, gli assiomi, riservandoci di analizzare più precisamente quello della Scelta nel prossimo paragrafo.

Assioma di Estensionalità. *Insiemi che hanno gli stessi elementi sono uguali.*

Quest'assioma garantisce, da una parte, che insiemi con gli stessi elementi ma che soddisfano "proprietà" diverse siano uguali e, dall'altra, che oggetti diversi dagli insiemi non siano parte dell'"universo del discorso" della teoria.

Assioma della Coppia. *Dati due insiemi a e b, esiste l'insieme $\{a, b\}$.*

Assioma dell'Unione. *Dato un insieme A, esiste il suo insieme-unione: l'insieme di tutti gli elementi degli elementi di A.*

Assioma dell'Insieme Potenza. *Dato un insieme A, esiste l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi, $\mathcal{P}(A)$.*

Questi tre assiomi ci consentono di effettuare varie operazioni insiemistiche. Per esempio, l'Assioma della Coppia ci consente di definire la nozione di *coppia ordinata* (a, b), l'Assioma dell'Insieme Potenza di definire concetti come quelli di *prodotto cartesiano*, *relazione* e *funzione*.
L'assioma successivo è centrale per gli scopi della teoria degli insiemi. Un insieme si definisce *infinito* se ha un *sottoinsieme proprio* (ovverosia, diverso dall'insieme stesso) infinito. Gli altri assiomi non ci consentono di dimostrare l'esistenza di un insieme con queste caratteristiche. Quindi abbiamo bisogno di un:

Assioma dell'Infinito. Esiste ω (ovverosia l'insieme che contiene $\emptyset$, il successore $s(\emptyset)$, il successore di questo, $s(s(\emptyset))$, *e così via).*

Molti insiemi si definiscono a partire da proprietà (espresse nel *linguaggio* della teoria degli insiemi). Non tutte le proprietà, però, come sappiamo già dai paradossi, sono coerenti. Zermelo mise al riparo da contraddizioni quest'idea attraverso il suo:

Assioma di Separazione. Dato un insieme X e una proprietà ϕ, esiste l'insieme Y degli x in X che soddisfano ϕ.

Tramite l'Assioma di Separazione si dimostra che il paradosso di Russell è un teorema di ZFC: "non esiste un insieme universale" (se esistesse, allora conterrebbe insiemi che "non sono membri di sé stessi").
Sin qui, non abbiamo esaminato, però, insiemi che "sono elementi di sé stessi", o che appartengano a "insiemi che appartengono a insiemi che appartengono a insiemi... che appartengono a sé stessi" (cioè, insiemi che si definiscono tramite *cicli* che iniziano e terminano con lo stesso insieme). Nessuno degli assiomi precedenti consente o proibisce l'esistenza di questi insiemi, quindi si può esplicitamente bandirli tramite il seguente assioma:

Assioma di Fondazione (o Regolarità). *Dato un insieme A, esiste sempre un elemento di A tale che l'intersezione di questo elemento con A stesso è vuota.*

La ragione per cui questo assioma ha una certa naturalezza verrà brevemente tratteggiata alla fine della prossima sezione. Gli ultimi due assiomi di ZFC sono sia potenti che fondamentali. Il primo è:

Assioma di Rimpiazzamento. *Dato un insieme A, e una funzione f definita su di esso, l'immagine di f, $f(A)$, è pure un insieme.*

Questo assioma è molto forte, in quanto ci consente di generare ordinali quali $\omega + \omega$ e, assieme all'Assioma dell'Insieme Potenza, le cardinalità transfinite oltre il *numerabile* $(\aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_\omega, \dots)$. Dell'ultimo assioma ci occupiamo nella prossima sezione.

4. L'assioma di scelta (AC)

Con l'Assioma della Scelta (che indichiamo con la sigla standard AC che sta per l'inglese "Axiom of Choice") si conclude la lista degli assiomi della teoria. Esso si può enunciare come segue:

Assioma di Scelta. *Data una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi non vuoti e disgiunti, esiste sempre una funzione di scelta f su di essa, ovverosia una funzione che fa corrispondere a ogni elemento $A \in \mathcal{F}$ un elemento $f(A) \in A$.*

Cominciamo col notare che una *famiglia di insiemi* è una collezione di sottoinsiemi di un dato insieme (in questo caso, sottoinsiemi reciprocamente disgiunti). Ora, l'assioma assicura l'esistenza di una

© Nuova Secondaria – n. 2, ottobre 2022 - anno XL - ISSN 1828-4582

funzione di selezione di un "rappresentante" per ciascuno di essi. La ragione ovvia e immediata per l'introduzione dell'Assioma di Scelta è che esso è fondamentale per dimostrare che ogni insieme sia, come pensava Cantor, *bene ordinabile*. Si immagini, infatti, di voler bene ordinare $\mathbb{R}$: AC garantisce di poter "selezionare" sempre un *reale* alla volta un numero transfinito di volte dall'insieme (rimanente) dei reali. Grazie ad AC, si può dimostrare, inoltre, che ogni insieme ha una cardinalità che è un qualche $\aleph$.
La giustificabilità dell'assioma è controversa: non a caso, poc'anzi ci chiedevamo perché ogni insieme dovesse essere, unitivamente, bene ordinabile. C'è chi ha sostenuto (come Cantor e Zermelo) che l'assioma abbia una sua autoevidenza, altri, invece, hanno sottolineato l'importanza di AC per la matematica, quindi il fatto che sia pienamente giustificato alla luce delle sue conseguenze.

Gli assiomi sono interpretabili come se si riferissero a una struttura, detta "gerarchia cumulativa", ovvero "gerarchia ben fondata" degli insiemi V (più semplicemente, "universo di tutti gli insiemi") i cui *livelli* contengono tutti gli insiemi definibili tramite gli assiomi. Il concetto di insieme, quindi, sembra implicare l'idea che gli insiemi siano gli elementi di V (il che rende più naturale l'Assioma di Fondazione). Studiare le proprietà di V è, quindi, lo scopo finale della teoria degli insiemi.

5. I nuovi assiomi

Ci sono proprietà degli insiemi che non sono dimostrabili in ZFC. Si dice che queste proprietà sono *indipendenti* dalla teoria. Per esempio, l'Ipotesi del Continuo è indipendente da ZFC. Questo risultato (dimostrato da K. Gödel e P. Cohen in due fasi diverse) ha generato un intenso dibattito filosofico sul significato dell'incompletezza insiemistica e sulla natura del concetto di insieme, di cui non possiamo rendere conto in questo articolo. Lo sviluppo di cui possiamo, brevemente, occuparci è quello della ricerca di nuovi assiomi, da aggiungere a ZFC per tentare di risolvere problemi come l'Ipotesi del Continuo e darci un quadro più esauriente, per così dire, della verità insiemistica. Si possono citare le seguenti classi di assiomi:[5]

1. *Assioma di Costruibilità*. L'Assioma di Costruibilità dice che V è uguale a una sua sottoclasse, che si indica con L che contiene solo gli insiemi che si possono definire con una formula del prim'ordine del linguaggio (costruibili). Ultimamente si sono prodotte estensioni di L compatibili con *grandi cardinali* (v. sez. 5). L'assioma implica l'Ipotesi del Continuo.

2. *Assiomi di Determinatezza*. L'Assioma di Determinatezza (AD) afferma che tutti i *giochi* a due definiti su sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono *determinati* (esiste una strategia vincente per uno dei due giocatori). Se i sottoinsiemi di reali sono di un certo tipo definibile, allora si ottengono assiomi di Determinatezza Definita. Si tratta di assiomi intensamente studiati in diverse aree della teoria degli insiemi e che hanno anche conseguenze robuste (AD contraddice AC). Non sembra, però, riflettano considerazioni di tipo intuitivo.

3. *Assiomi di Forcing*. Il *forcing* è un metodo per ottenere modelli di ZFC (P. Cohen lo inventò per trovare un modello che contraddicesse l'Ipotesi del Continuo). Questi assiomi, a loro volta, postulano l'esistenza di nozioni di forcing corrispondenti all'esistenza di certi *ordini parziali*. La cosa interessante è che questi assiomi, in generale, implicano che $\mathfrak{c} = \aleph_2$. Tuttavia, nessuno di essi sembra intuitivamente giustificato, anche se è stato argomentato che essi rispondano a principi di *massimalità* e *completezza* (cf. Bagaria 2005).

6. I grandi cardinali

Gli ultimi assiomi di cui ci occuperemo sono gli assiomi di grandi cardinali. Quest'ultimi sono cardinali non generabili in ZFC. Essi generalizzano proprietà di cardinali più piccoli (di $\aleph_0$, per esempio), quali l'*inaccessibilità* e la *misurabilità*, ma si possono anche vedere come conseguenza di *principi di riflessione*: "una proprietà di V è soddisfatta già da qualche insieme più piccolo", o di *riflessione forte* (*rassomiglianza*): "V contiene una copia di sé stesso che ha le sue stesse proprietà".[6] Ora, sia A un assioma che asserisce l'esistenza di un grande cardinale. ZFC+A dimostra la coerenza di ZFC. Inoltre, dati due assiomi A e B, può accadere che o ZFC+A dimostra la coerenza di ZFC+B, o viceversa, o entrambe le cose. Sia ϕ una proposizione indipendente da ZFC. Molto spesso si ha, inoltre, che

[5] Rinviamo a Maddy 1988 per una trattazione esauriente.
[6] Tutte queste nozioni sono ben spiegate in Kanamori (2009).

ZFC+A dimostra la coerenza di ZFC+ϕ *e* viceversa: si dice, quindi, che la "forza di coerenza" di ϕ è uguale a quella di A. Questi risultati ci danno una "misura" dell'indipendenza di ϕ. E questo è soltanto uno dei meriti della teoria dei grandi cardinali: essi hanno ricadute ampie in settori della matematica anche non insiemistici. Infine, molti di essi hanno una base intuitiva in quanto sono giustificabili a partire da proprietà di V.

7. Conclusioni

L'esplorazione dell'infinito attuale, nella sua incarnazione insiemistica, ha dato risultati sorprendenti, che suggeriscono un'immagine di grande *unità* della matematica tutta. Questo dimostra, inoltre, che i fenomeni infinitari hanno un carattere fondativo e unificante: sebbene ovviamente la matematica non si riduca a una manciata di intuizioni concernenti gli insiemi infiniti, disporre di una teoria fondazionale unica ci consente di sviluppare ulteriormente le nostre intuizioni e di trovare nuove e più profonde connessioni fra tutti i fenomeni matematici. D'altro canto, se la matematica è la scienza di strutture astratte, senz'altro l'universo della teoria degli insiemi costituisce la *struttura fondamentale*, di cui gli assiomi delineano proprietà e potenziali estensioni.

Claudio Ternullo
Università di Barcellona

Riferimenti

- Bagaria, J. (2005) "Natural Axioms of Set Theory and the Continuum Problem" in Hájek, P., Valdés-Villanueva, L., Westertåhl, D. (eds.) *Logic, Methodology and Philosophy of Science: Proceedings of the Twelfth International Congress*, King's College Publications, London, pp. 43-64.
- Cantor, G. (1932) *Gesammelte Abhandlungen*, Springer, Berlin.
- Ferreirós, J. (2007) *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*, Birkäuser, Basel.
- Kanamori, A. (2009) *The Higher Infinite*, Springer, Berlin.
- Ternullo, C., Fano, V. *L'infinito. Filosofia, matematica, fisica,* Carocci.
- Maddy, P. (1988) "Believing the New Axioms" I-II, *Bulletin of Symbolic Logic,* 53(2):481-511; 53(3):736-64.
- Maddy, P. (2006) "Set-Theoretic Naturalism", *Journal of Symbolic Logic*, 61(2):490-514.

© Nuova Secondaria – n. 2, ottobre 2022 - anno XL - ISSN 1828-4582